Tampereen yliopisto

Ville Mörsky

OPTIMOINTITEHTÄVIEN DEKOMPOSOINTI-MENETELMÄT

Teknisten tieteiden tiedekunta
Kandidaatintyö
Syyskuu 2019

TIIVISTELMÄ

Ville Mörsky: Optimointitehtävien dekomposointimenetelmät
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Teknisten tieteiden TkK-tutkinto-ohjelma
Syyskuu 2019

Optimointitehtävän dekomposointi hajottaa tehtävän useisiin pienempiin aliongelmiin. Dekomposoitavia tehtäviä ilmenee tapauksissa, joissa järjestemä koostuu useista pienemmistä alisysteemeistä. Näiden alisysteemien väliset kytkökset hankaloittavat optimointitehtävän dekomposointia. Aliongelmien itsenäinen ratkaiseminen ei välttämättä tuota sopivaa ratkaisua, kun kytkökset otetaan huomioon. Tämän vuoksi optimointitehtävän ratkaisussa käytetään koordinointia kytkösten huomioimiseksi.

Tässä työssä tutkittiin optimointitehtävien dekomposointimenetelmiä. Työssä esitellään, kuinka menetelmät muotoilevat optimointitehtävän dekomposoitavaan muotoon ja kuinka menetelmien käyttämät koordinointitavat toimivat, jotta alisysteemien kytkökset huomioiva ratkaisu löydetään.

Avainsanat:optimointi, dekomposointi, Dantzig–Wolfe, Benders, Lagrangen relaksaatio

ABSTRACT

Ville Mörsky: Decomposition methods for optimisation problems
Bachelor of Science thesis
Tampere University
Bachelor's Degree Programme in Engineering Sciences
September 2019

Decomposing an optimisation problem creates several smaller subproblems. Decomposable problems appear in systems that consist of multiple sub units. The couplings of these sub units complicate the solution of the problem. Solving the subproblems independently of each other might not provide a feasible solution when the couplings are considered. Due to this the solution of the problem must be coordinated.

This thesis is a study of decomposition methods that are used in optimisation. This thesis presents how decomposition methods reformulate the optimization problem to a decomposable form and how the coordination procedures of these methods work to find a solution that considers the couplings between sub units.

Keywords: optimisation, decomposition, Dantzig–Wolfe, Benders, Lagrangian relaxation

SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO ... 1
2. OPTIMOINTITEORIA ... 3
 2.1 Optimointitehtävä ... 3
 2.2 Duaalisuus ... 3
 2.3 Herkkyys ... 4
3. DEKOMPOSOINTI ... 5
 3.1 Komplisoivat rajoitteet ... 6
 3.2 Komplisoivat muuttujat ... 7
 3.3 Dekomposointi ja koordinointi ... 7
4. DANTZIG-WOLFE DEKOMPOSOINTI ... 9
 4.1 Tehtävän uudelleenformulointi ... 9
 4.2 Ratkaisumenetelmä ... 10
5. BENDERSIN DEKOMPOSOINTI ... 13
 5.1 Tehtävän uudelleenformulointi ... 14
 5.2 Ratkaisumenetelmä ... 15
6. LAGRANGEN RELAKSAATIO ... 17
 6.1 Tehtävän uudelleenmuotoilu ... 17
  6.1.1 Komplisoivien rajoitteiden käsittely ... 17
  6.1.2 Lagrangen dekomposointi ja komplisoivat muuttujat ... 18
 6.2 Lagrangen duaalitehtävä ja ratkaisumenetelmät ... 19
  6.2.1 Subgradienttimenetelmä ... 20
  6.2.2 Cutting plane –menetelmä ... 21
  6.2.3 Bundle-menetelmät ... 22
7. YHTEENVETO ... 23
LÄHTEET ... 24

LYHENTEET JA MERKINNÄT

MP	Master-ongelma, Master Problem
SP	Aliongelma, Subprobelm
CPM	Cutting plane –menetelmä, Cutting plane method
LR	Lagrangen relaksaatio
LD	Lagrangen dekomposointi
SG	Subgradientti
ACCPM	Analytic center cutting plane method

1. JOHDANTO

Decompose: *"to separate into constituent parts or elements or into simpler compounds…"*

"Decompose." *Merriam-Webster.com.* Merriam-Webster, n.d. Web. 3 Jan. 2018.

Optimaalisen päätöksenteon tehtävät, kuten tuotannon suunnittelu, skedulointi ja prosessien ohjaus perustuvat ongelmien matemaattiseen mallinnukseen. Mallinnuksessa tunnistetaan päätöksentekoa koskevat tavoitteet, muuttujat ja rajoitteet [1, s. 2]. Optimointi pyrkii löytämään tavoitteen mukaisesti parhaan muuttujan arvon, joka kuitenkin täyttää rajoitteiden sille asettamat ehdot.

Kun kilpailukyvyn saavuttaminen vaatii entistä enemmän, teknologian kehitys toimii mahdollistajana entistä monimutkaisempien matemaattisten mallien kehitykselle ja hyödyntämiselle [2]. Tehtävien matemaattisissa formuloinneissa monimutkaisuus ilmenee esim. suurena kokona, ts. muuttujien ja rajoitteiden suurena määränä, konveksiuden puutteena, epälineaarisuutena tai kokonaislukumuuttujina. Suuret ja monimutkaiset järjestelmät asettavat optimoinnille haasteita. Järjestelmän matemaattisen kuvauksen monimutkaistuessa optimoinnin vaatima laskenta kasvaa. Näiden seikkojen vuoksi suurten ja monimutkaisten järjestelmien optimoinnissa käytetään menetelmiä, jotka hyödyntävät järjestelmän erityisrakenteita. [3, s. 104-105]

Suuret kompleksiset järjestelmät koostuvat usein monista aliyksiköistä, joiden toiminta on kytköksissä toisiinsa [4]. Tällaisten järjestelmien ohjaus tyypillisesti pohjautuu hajautettuun arkkitehtuuriin, jossa yksiköiden ohjaus saattaa toimia hyvinkin itsenäisesti [2]. Mikäli aliyksiköt olisivat täysin itsenäisiä yksikköjä, toimintojen optimointi voitaisiin suorittaa itsenäisesti eri yksiköissä. Todellisuudessa kuitenkin aliyksiköiden välisten kytkösten vuoksi itsenäiset ratkaisut eivät tuota optimaalista ratkaisua. Optimointitehtävien matemaattisessa kuvauksessa aliyksiköiden väliset kytkökset havaitaan ns. komplisoivina rajoitteina tai päätöksentekomuuttujina, jotka liittävät aliyksiköt toisiinsa [5, s. 5-6]. Tällaisia erikoisrakenteita sisältävien optimointitehtävien hajottaminen, eli dekomposointi, erillisiin aliongelmiin pohjautuu monitasoisiin menetelmiin, joissa kytköksistä purettujen aliongelmien tasoa koordinoi ylemmän tason toimija [3, s.105], usein ns. Master-ongelma.

Tämä työ on dekomposoinnin perusmenetelmiä sekä niiden teoriaa ja ratkaisuperiaatteita kartoittava kirjallisuusselvitys. Näihin menetelmiin kuuluvat Dantzig-Wolfe ja Bendersin dekomposointimenetelmät sekä Lagrangen relaksaatio. Menetelmien taustalla olevat optimointitehtävän käsittelytoimenpiteet esitetään yhteisen viitekehyksen mukaisesti. Toimenpiteiden matemaattiset perusteet ja niihin sovitetut ratkaisumenetelmät esitetään menetelmäkohtaisesti.

Työ esittää dekomposoinnin matemaattiset menetelmät dekomposointi-koordinointi viitekehyksessä. Tutkimuskysymykset on jaoteltu näkökulmien mukaan seuraavalla tavalla:

- Dekomposointi: Kuinka ns. separoituva rakenne voidaan matemaattisilla toimenpiteillä paljastaa, jotta tehtävä hajoaa osiin?
- Menetelmän toimintamalli tai koordinointi: Kuinka aliongelmien ratkaisuja voidaan ohjata, jotta aliongelmat kytkevät rajoitteet ja muuttujat huomioidaan?

Työssä käsiteltävät optimointitehtävät on rajattu lineaarisiin jatkuvien muuttujien tehtäviin. Työn laajuuteen eivät kuulu Master- tai aliongelmien ratkaisussa käytettävät ratkaisualgoritmit.

Työ on järjestetty teemoittain seuraavalla tavalla. Luvun 2 tarkoituksena on tarjota riittävä pohja työn matematiikan ja optimointiteorian ymmärtämiselle. Luku koostuu optimointitehtävien perusteiden, duaalisuuden sekä herkkyyden käsitteiden esittelystä. Luku 3 kuvaa dekomposoituvien optimointitehtävien rakenteita sekä havainnollistaa, kuinka komplisoivat rajoitteet ja muuttujat esiintyvät optimointitehtävässä.

Luvuissa 4, 5 ja 6 esitellään dekomposointimenetelmät järjestyksessä Dantzig–Wolfe, Benders ja Lagrangen relaksaatio. Luvut 4 ja 5 on järjestetty seuraavalla tavalla. Luku alkaa alkuesittelystä, jota seuraa menetelmän vaatima optimointitehtävän uudelleenmuotoilu. Tätä seuraa lopulta menetelmän ratkaisustrategia. Luku 6 esittelee Lagrangen relaksaation, sen käyttötapoja sekä eri ratkaisumenetelmiä. Yhteenveto menetelmistä on tehty kootusti luvussa 7.

2. OPTIMOINTITEORIA

Lineaarisen optimoinnin teoriaa on kirjallisuudessa käsitelty mittavasti. Tämän optimoinnin peruskäsitteitä avaavan luvun perustana toimii [1, s. 355-366].

2.1 Optimointitehtävä

Lineaarinen optimointitehtävä esitetään tyypillisesti muodossa

$$\min c^T x \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} A_e x &= b_e && (2.1a)\\ Ax &\geq b && (2.1b)\\ x &\geq 0, && (2.1c) \end{aligned}$$

missä $c^T x$ on tavoitefunktio, x päätöksentekomuuttuja ja c tavoitefunktion kustannuskerroinvektori. Minimointitehtävä pyrkii löytämään pienimmän tavoitefunktion arvon tuottavan arvon päätöksentekomuuttujalle. Rajoitteet (2.1a-c) määräävät päätöksentekomuuttujalle käyvän alueen. Usein tehtävät rajoitteet esitetään yllä olevasta sekä yhtälö- että epäyhtälörajoitteet sisältävästä tavasta poiketen. Esitysmuoto voidaan tarvittaessa vaihtaa yksinkertaisin toimenpitein esimerkin [1, s. 356-357] mukaisesti.

Epäyhtälörajoite (2.1b) määrittelee joukon puolitasoja. Epäyhtälörajoite määrää siten käypää aluetta näiden puolitasojen leikkauksen kautta. Tämä leikkaus muodostaa monitahokkaan, joka voidaan esittää myös sen kulmapisteiden kautta. Dantzig–Wolfe-dekomposointi nojaa tähän periaatteeseen, ja siten sen esitys on jätetty lukuun 3.

Lineaarisen optimointitehtävän ratkaisu, mikäli se on olemassa ja on äärellinen, sijaitsee monitahokkaan kulmapisteessä. Nämä kulmapisteet ovat ns. käypiä kantaratkaisuja. Kanta viittaa muuttujiin, joiden arvot kantaratkaisussa poikkeavat nollasta. Kantaan kuulumattomien muuttujien arvot ovat nollia.

2.2 Duaalisuus

Optimointitehtävälle voidaan muodostaa vaihtoehtoinen tehtävä, ns. duaalitehtävä. Yksinkertaisuuden vuoksi käsitellään lineaarista tehtävää, jolla on vain yksi rajoite

$$\min\{c^T x \mid Ax \geq\ b\}. \tag{2.2}$$

Tämän perusmuotoisen tehtävän duaalitehtävän tavoitefunktio on muotoa

$$d(u) = \min c^T x - u^T(Ax - b), \tag{2.3}$$

missä u on duaalimuuttuja tai Lagrangen kerroin. Duaalitehtäväksi saadaan

$$\max_{u \geq 0} d(u). \tag{2.4}$$

Koska tavoitefunktio saa arvonsa rajoittamattoman lineaarisen minimointitehtävän ratkaisun mukaan, tavoitefunktio saa arvon $-\infty$ lukuun ottamatta tapausta $c^T - u^T A = 0$. Tämän vuoksi duaalitehtävä saa muodon

$$\max b^T u \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} A^T u &= c \\ u &\geq 0. \end{aligned}$$

Lineaarisille tehtäville duaalisuus esiintyy ns. vahvana duaalisuutena. Tällöin äärellisen ratkaisun tapauksessa molempien tehtävien ratkaisujen arvot ovat yhtä suuret. Lisäksi tehtävän ratkaisun ollessa ääretön toisen ratkaisu on ei-käypä.

2.3 Herkkyys

Herkkyysanalyysi käsittelee optimointitehtävän ratkaisun herkkyyttä tehtävän rajoite- sekä kustannusfunktion parametrien muutoksille.

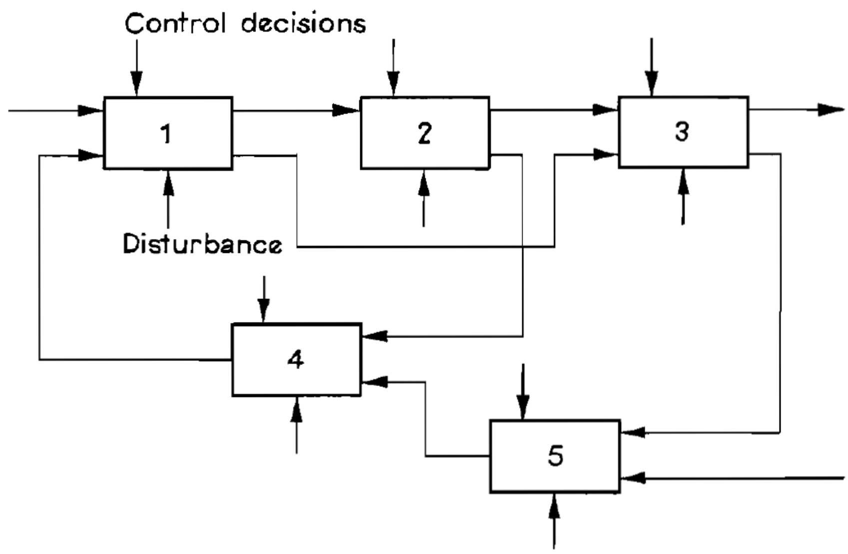
Marginaalihinta tai varjohinta kuvaa tavoitefunktion arvon riippuvuutta rajoitteen oikeanpuoleisesta arvosta. Rajoitteen marginaalihinta on sitä vastaava Lagrangen kerroin, u. Päätöksentekomuuttujien alarajoitteiden marginaalihinnat ovat ns. vaihtoehtoiskustannuksia. Vaihtoehtoiskustannus $c - A^T u$ kertoo, kuinka muuttujan arvon poikkeutus nollasta vaikuttaa ratkaisun arvoon. [6]

Herkkyyden käsitteet ovat olennaisia dekomposointimenetelmissä. Menetelmien pohjana toimivan tehtävän yksinkertaistuksen takia ratkaisutavasta tulee iteratiivinen. Iteraation tavoitteena on tehtävän ratkaisua parantavan informaation löytäminen ja hyödyntäminen.

3. DEKOMPOSOINTI

Suurikokoisten optimointitehtävien ratkaisua voi lähestyä ns. suorien ja epäsuorien ratkaisutapojen kautta. Suorat ratkaisumenetelmät keskittyvät olemassa olevien ratkaisualgoritmeihin erikoistamiseen jollekin tehtävätyypille, kun taas epäsuorat menetelmät hyödyntävät ongelman dekomposointia tai ositusta. [3, s. 104-105]

Dekomposointimenetelmissä ongelma hajotetaan useaksi aliongelmaksi. Suurikokoiset systeemit tyypillisesti koostuvat useista pienemmistä alisysteemeistä, jotka ovat kytköksissä toisiinsa [4]. Kuvassa 1 on havainnollistettu hajallaan sijoittuneista alisysteemeistä koostuvaa järjestelmää. Alisysteemien väliset virrat toimivat tässä tapauksessa kytköksinä, joiden vuoksi yksittäisen alisysteemin ohjausten vaikutukset ulottuvat muihin alisysteemeihin.



Kuva 1. *Esimerkki alisysteemeistä koostuvasta järjestelmästä [4, s. 8]*

Avaruudellisen alisysteemien hajautuneisuuden yhteydessä esiintyvien kytkösten lisäksi myös ajan voidaan käsittää kytkevän alisysteemit toisiinsa esimerkiksi dynaamisissa järjestelmissä. Tällöin alisysteemeihin järjestelmän jakaa valittu aikahetki ja kytköksenä toimii syntyvät aikajaksot yhdistävän hetken tila. [3, s. 446]

Optimointitehtävien formuloinneissa alisysteemeistä koostuva kokonaisuus näkyy tyypillisesti lohkomaisena rakenteena rajoitematriisissa. Alisysteemien väliset kytkökset rikkovat rajoitematriisin lohkorakennetta. Systeemi, jossa alisysteemit eivät ole kytköksissä toisiinsa, on ns. luonnollisesti dekomposoituva. Optimointitehtävä on tällöin esimerkiksi muotoa

$$\min c_1^T x_1 + c_2^T x_2 + c_3^T x_3 \tag{3.1}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0,$$

missä päätöksentekomuuttuja koostuu alisysteemien lokaaleista muuttujista x_1, x_2 ja x_3. Yksikään rajoite ei pidä sisällään muiden kuin yhden alisysteemin muuttujia. Tavoitefunktio puolestaan on alisysteemeittäin separoituva summa. Tehtävä hajoaa itsenäisiksi ongelmiksi

$$\min\{c_i^T x_i | A_i x_i = b_i, x_i \geq 0\}, \qquad i = 1,2,3. \tag{3.2}$$

Luonnollisesti hajoava rakenne rikkoutuu, kun ongelmassa on rajoite tai muuttuja, joka koskettaa useampaa kuin yhtä alisysteemiä. Tällaiset rajoitteet tai muuttujat komplisoivat ongelman ratkaisua estäen suoran hajottamisen. Esimerkiksi [5] sisältää oheisten käsitteiden esittelyn lisäksi myös kattavat sovellusesimerkit.

3.1 Komplisoivat rajoitteet

Komplisoiva rajoite sisältää usean eri alisysteemin muuttujia. Tämä voi esimerkiksi johtua siitä, että prosessit jakavat jonkin resurssin. Rajoitematriisissa tämä näkyy seuraavan esimerkin mukaisesti:

$$\min c_1^T x_1 + c_2^T x_2 + c_3^T x_3 \tag{3.3}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ e \end{bmatrix}$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0,$$

missä rajoitematriisin alin rivi kytkee eri alisysteemien muuttujat.

Seuraavissa luvuissa komplisoivat ja ei-komplisoivat rajoitteet esitetään erillisinä rajoitteinaan muodossa

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ Bx &= e \end{aligned} \qquad \text{tai} \qquad \begin{aligned} A_i x_i &= b_i, \qquad i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{n} B_i x_i &= e \end{aligned}$$

missä vasemmalla A on ei-komplisoivan rajoitteen lohkomainen matriisi ja B komplisoivan rajoitteen matriisi. Oikeanpuoleisessa esitystavassa indeksi i viittaa alisysteemiin i.

3.2 Komplisoivat muuttujat

Komplisoiva muuttuja vaikuttaa usean alisysteemin rajoitteisiin. Rajoitematriisissa tapaus voidaan tunnistaa pystyrivistä, joka kattaa useamman alisysteemin vaakarivit. Esimerkkinä tapauksesta toimii tehtävä

$$\min d^T y + c_1^T x_1 + c_2^T x_2 + c_3^T x_3 \tag{3.4}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & A_3 & B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \\ y &\geq 0, \end{aligned}$$

missä voidaan havaita globaali, kaikkien alisysteemien rajoitteisiin vaikuttava, muuttuja y.

Yhtälörajoitteen tyyppinen rakenne esitetään jatkossa muodossa

$$Ax + By = b \qquad \text{tai} \qquad A_i x + B_i y = b_i, \qquad i = 1, .., n,$$

jotka saatiin erottamalla komplisoiva muuttuja ja sitä vastaava matriisin osa omaksi termikseen. Oikealla rajoitteet on esitetty alisysteemikohtaisesti.

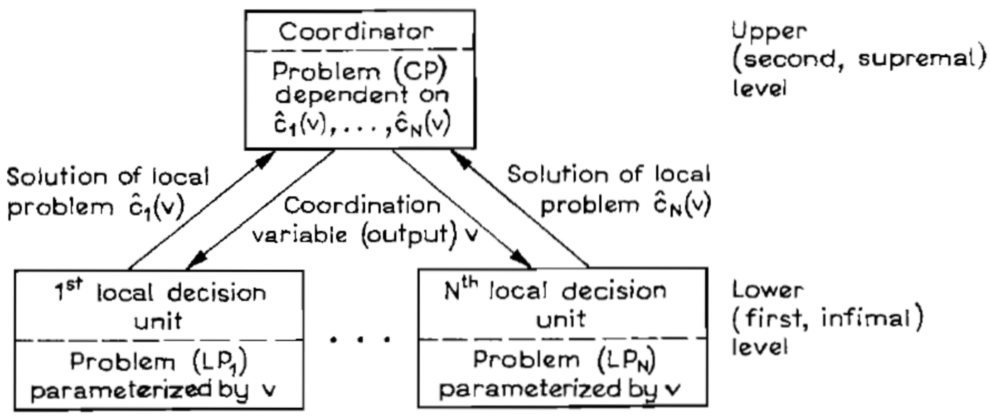
3.3 Dekomposointi ja koordinointi

Dekomposointi hajottaa alkuperäisen ongelman useiksi aliongelmiksi. Kuten edellisissä luvuissa esitettiin, tämä hajotus ei aina ole suoraviivaista. Esteenä saattaa olla jaettuja rajoitteita tai muuttujia. Esteiden ylittäminen vaatii erityisiä lähestymistapoja.

Geoffrion [7] esittää suurikokoisten optimointitehtävien lähestymistavan kahden oleellisen käsitteen kautta: tehtävän manipulointi ja ratkaisustrategia. Tehtävän manipulointi muokkaa tehtävän uuteen muotoon. Manipulointimenetelmiksi Geoffrion nimeää mm.

dualisoinnin, projektion, sisäpuoleisen linearisoinnin (inner linearization) ja ulkopuoleisen linearisoinnin (outer linearization). Ratkaisustrategia puolestaan kuvaa tapaa supistaa uusi tehtävä yksinkertaisemmin ratkaistavaan muotoon. Näiksi strategioiksi on nimetty mm. paloittainen, rajoittava sekä relaksoiva strategia. Mainittuja menetelmiä käsitellään niihin liittyvien dekomposointimenetelmien yhteydessä. Ratkaisu alkuperäiseen tehtävään tuotetaan iteratiivisesti, koska yksinkertaistetut tehtävät saattavat tuottaa huonoja ratkaisuja. Iteroinnilla pyritään parantamaan alkuperäistä tehtävää approksimoivaa yksinkertaistettua tehtävää. Ratkaisun kannalta oleellista ei ole uuden optimointitehtävän täydellinen rakentaminen vaan se, että tehtävä tuottaa riittävän hyvän tuloksen. Tähän riittää uuden tehtävän ratkaisun kannalta tärkeä informaatio, joka voi koostua rajoitteista tai muuttujista.

Dekomposointimenetelmissä iterointi tapahtuu kahden tason, ylemmän koordinoivan tason sekä alemman tason aliongelmien, yhteistyönä. Iteratiivinen koordinoiva optimointi pyrkii globaalin, aliongelmien kytkökset huomioivan, ratkaisun saavuttamiseen.



Kuva 2. *Koordinoinnin hierarkia [4, s. 83]*

Koordinoija vaikuttaa alisysteemeihin ns. koordinointimuuttujan kautta. Tätä on havainnollistettu kuvassa 2. Kuvassa koordinoija välittää koordinoijamuuttujan arvon aliongelmille, jotka ratkaisevat omat tehtävänsä. Koordinoija ottaa vastaan aliongelmien ratkaisuja, päivittää koordinointimuuttujan arvon ja välittää sen jälleen aliongelmille. Muuttujan arvon asettelun tavoitteena täysin hajautetussa rakenteessa on, että koordinointimuuttujan parametrisoimien aliongelmien lokaalit ratkaisut täyttävät myös globaalit rajoite-ehdot.

Aliongelmat eivät kuitenkaan aina tuota suoraan tätä globaalia ratkaisua. Usein sen sijaan aliongelmat tuottavat ratkaisunsa pohjalta informaatiota, joka lisätään koordinoijana toimivaan Master-ongelmaan. Master-ongelma tuottaa globaalin ratkaisun, kun ratkaisun kannalta kriittinen informaatio on koottu aliongelmia ohjaamalla. Tällainen ratkaisutapa, esiintyy käsiteltävistä menetelmistä Dantzig–Wolfe- sekä Bendersin menetelmissä.

4. DANTZIG–WOLFE-DEKOMPOSOINTI

Dantzig–Wolfe-dekomposointimenetelmä [9] on lineaaristen komplisoivia rajoitteita sisältävien optimointitehtävien ratkaisumenetelmä. Menetelmää käyttämällä voidaan hyödyntää tehtävän rajoitteista paljastuvia separoituvia rakenteita, mikä mahdollistaa suurten optimointitehtävien tehokkaamman ratkaisun.

Dantzig–Wolfe-dekomposointimenetelmä perustuu rajoitteiden määräämän monitahokkaan esitystavan muutokseen. Tehtävää manipuloidaan esittämällä joukko ei-komplisoivia rajoitteita niiden määräämän alueen kulmapisteiden kautta. Tätä manipulointitapaa kutsutaan sisäpuoleiseksi linearisoinniksi, koska samalla periaatteella voidaan approksimoida myös epälineaaristen rajoitteiden määräämiä alueita sisäpuolelta. Ongelma supistetaan helpommin ratkaistavaan muotoon rajoittamalla manipuloinnin kautta saatua tehtävää. Tämä tapahtuu rajoittamalla käytettävien kulmapisteiden määrää. [7, s. 679]

Aliongelman tehtäväksi asetetaan kulmapiste-ehdokkaiden tuottaminen Master-ongelmalle. Lähestymistavan etuna on, että komplisoivien rajoitteiden huomiointi jää Master-ongelmalle. Koska aliongelman ei tarvitse välittää komplisoivista rajoitteista, sen separoituvuutta voidaan hyödyntää hajottamalla aliongelma useaksi eri aliongelmaksi.

Koordinoinnin alemman tason tavoitteena on tuottaa kulmapiste-ehdokkaita siten, että niiden lisäys Master-ongelmaan parantaa ratkaisua. Tämän tapahtuu ns. column generation –strategian [3, s. 146-148] pohjalta, joka esitellään lyhyesti luvussa 4.2.

Menetelmän meriitit nousevat erityisesti esiin rinnakkaista laskentaa hyödyntäessä [10]. Rinnakkaisen laskennan edut johtuvat aliongelman hajotettavasta rakenteesta.

4.1 Tehtävän uudelleenformulointi

Tarkastellaan lineaarista optimointitehtävää komplisoivilla rajoitteilla (4.1b).

$$\min c^T x \tag{4.1}$$

$$Ax = b \tag{4.1a}$$
$$Bx = e \tag{4.1b}$$
$$x \geq 0 \tag{4.1c}$$

Tehtävän uudelleenformulointi esitetään [3, s. 144-155] pohjalta.

Rajoitteet (4.1a) ja (4.1c) määräävät konveksin monitahokkaan

$$S = \{x | Ax = b, x \geq 0\}. \tag{4.2}$$

Monitahokas S voidaan esittää sen kulmapisteiden konveksina kombinaationa muodossa

$$x = \sum_j \lambda_j x^j, \qquad \sum_j \lambda_j = 1, \qquad \lambda_j \geq 0, \tag{4.3}$$

missä x^j ovat monitahokkaan kulmapisteitä. Huomioitavaa on, että monitahokkaan ollessa avoin, sen särmien puolisuorat on myös huomioitava esityksessä, jotta se kattaisi avoimen osan [3, s. 164-165].

Määritelmien pohjalta alkuperäisestä ongelmasta voidaan muotoilla nyt seuraava ns. Master-ongelma

$$\min \sum_j f_j \lambda_j \tag{4.4}$$

$$\sum_j p_j \lambda_j = e \tag{4.4a}$$

$$\sum_j \lambda_j = 1 \tag{4.4b}$$

$$\lambda_j \geq 0,$$

jonka päätöksentekomuuttujia ovat nyt λ_j. ja missä

$$f_j = c^T x^j \tag{4.5a}$$

$$p_j = Bx^j. \tag{4.5b}$$

Kun kustannuksen arvo kulmapisteissä tunnetaan, optimointi voidaan toteuttaa. Valintaa rajoittaa alkuperäisen tehtävän komplisoiva rajoite nyt muodossa (4.4a).

4.2 Ratkaisumenetelmä

Alkuperäisestä tehtävästä poiketen rajoitteet (4.1a) ja (4.1c) on nyt Master-ongelmassa määrätty kulmapisteiden kautta. Seurauksena tehtävän yhtälörajoitteiden määrä väheni, mutta muuttujien lukumäärä, joka nyt riippuu S:n (4.2) kulmapisteiden määrästä, kasvoi. [3, s. 149]

Ratkaisustrategiaksi voidaan ottaa tehtävän rajoittaminen, jolloin kaikkien kulmapisteiden määrittäminen vältetään. [7, s. 679]

Jotta vähäisemmällä kulmapisteiden määrällä voidaan löytää ratkaisu, rajoitetun tehtävän iteratiivisessa ratkaisussa käytetään ns. column generation -strategiaa. Tavoitteena on pienimmän, käytännössä minimointitehtävälle negatiivisimman, vaihtoehtoiskustannuksen omaavan muuttujan löytäminen. Vaihtoehtoiskustannus kuvaa kuinka kustannusfunktion arvo muuttuu, kun muuttujan arvo irtoaa nollasta. Tehtävässä 4.4 jokaista muuttujaa vastaa yksi kulmapiste. Täten muuttujien vaihtoehtoiskustannuksien tutkimisessa on kyse myös kulmapisteiden kelpoisuuksien tutkimisesta. Pienintä vaihtoehtoiskustannusta kulmapisteistä etsivä tehtävä on

$$\min_j (c - B^T u)^T x^j - u_0 \tag{4.6}$$

missä u ja u_0 ovat rajoitteiden (4.4a) ja (4.4b) duaalimuuttujat. [3, s. 150]

Dantzig-Wolfe dekomposoinnissa column generation -strategiaa hyödynnetään siis rajoitetun Master-ongelman laajentamisessa. Rajoitetun ongelman muuttujat ovat alkuperäisen ongelman osajoukko, ts. osa kulmapisteistä on poistettu. Rajoitettuun Master-ongelmaan lisätään muuttujia edellä esitetyn vaihtoehtoiskustannusstrategian mukaisesti aliongelman

$$\min_x (c - B^T u)^T x \tag{4.7}$$

$$Ax = b, \qquad x \geq 0$$

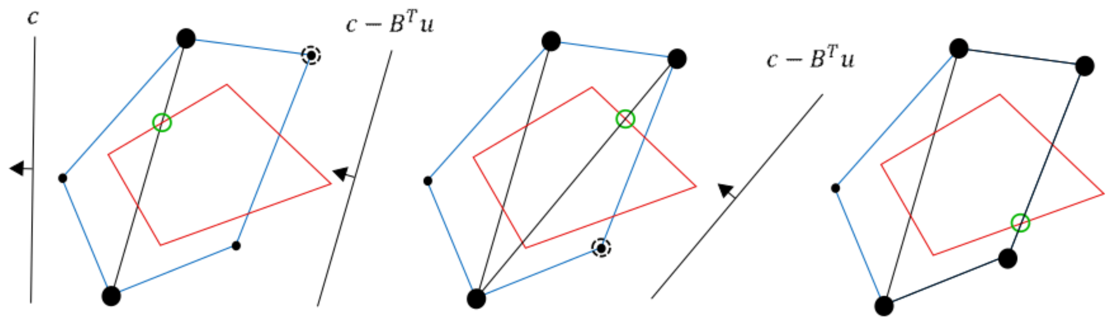
avulla, missä u on Master-ongelman ratkaisun tuottama duaalimuuttuja. Koska tehtävän (4.6) ratkaisua etsitään S:n (4.2) kulmapisteistä, voitiin sen ratkaisemiseksi palata rajoitteiden alkuperäiseen kulmapisteistä riippumattomaan esitysmuotoon. Huomattavaa on, ettei aliongelma sisällä komplisoivia rajoitteita (4.1b), joten matriisin A rakennetta voidaan käyttää hyväksi. Tehtävä voidaan separoituvana siten hajottaa useaksi itsenäiseksi aliongelmaksi. [3, s. 150-151]

Ratkaisun suppenemista tarkkaillaan aliongelman ratkaisun pohjalta. Muuttujan lisäämisen ehtona on negatiivinen vaihtoehtoiskustannus, jotta minimointitehtävän ratkaisu paranisi. Mikäli ehto ei täyty, eli

$$(c - B^T u)^T x^j - u_0 < 0 \tag{4.8}$$

ei pidä, algoritmi päättyy. [3, s. 151]

Rajoitettu Master-ongelma alustetaan esim. ratkaisemalla aliongelmat satunnaisilla kustannuskertoimilla. Näin tuotetaan alustava joukko kulmapisteitä tehtävälle. Huomioitavaa on myös Master-ongelman mahdollinen ei-käypyys. Mikäli pisteiden määräämä alue ei leikkaa Master-ongelman alueen kanssa, käypää Master-ongelman ratkaisua ei ole. Tämä ongelma voidaan ratkaista lisämuuttujalla, joka muokkaa Master-ongelman rajoja tarvittaessa. [5, s. 88-89]



Kuva 3. *Dantzig-Wolfe-iteroinnin eteneminen on esitetty vasemmalta oikealle. Aliongelma optimoi sinisen alueen yli ja sen kustannuksen tasokäyrä on esitetty kuvien oikealla puolella. Ratkaisu (katkoviivaympyrä) lisätään Master-ongelmaan (korostetut pisteet). Master-ongelma optimoi alkuperäiskustannuksella punaisen alueen sekä korostettujen pisteiden määräämän alueen leikkauksen yli. Ratkaisu on ympyröity vihreällä.*

Kuvassa 3 on havainnollistettu, kuinka Dantzig–Wolfe-menetelmä etenee iteraatio kerrallaan. Kuvassa Master-ongelma on asettanut ratkaisunsa pohjalta aliongelmalle uudet kustannuskertoimet, mikä havaitaan kuvissa aliongelmien kustannusten tasokäyristä. Aliongelma optimoi sinisellä alueella ja löytää ratkaisunsa uudesta kulmapisteestä. Tämä kulmapiste on lisätty seuraavan iteraation Master-ongelmaan. Oikeanpuolimmaisessa kuvassa Master-ongelma on löytänyt lopullisen optimaalisen ratkaisun. Kuten kuvasta voidaan havaita, kaikkia sinisen alueen kulmapisteitä ei tarvittu ratkaisun löytämiseen.

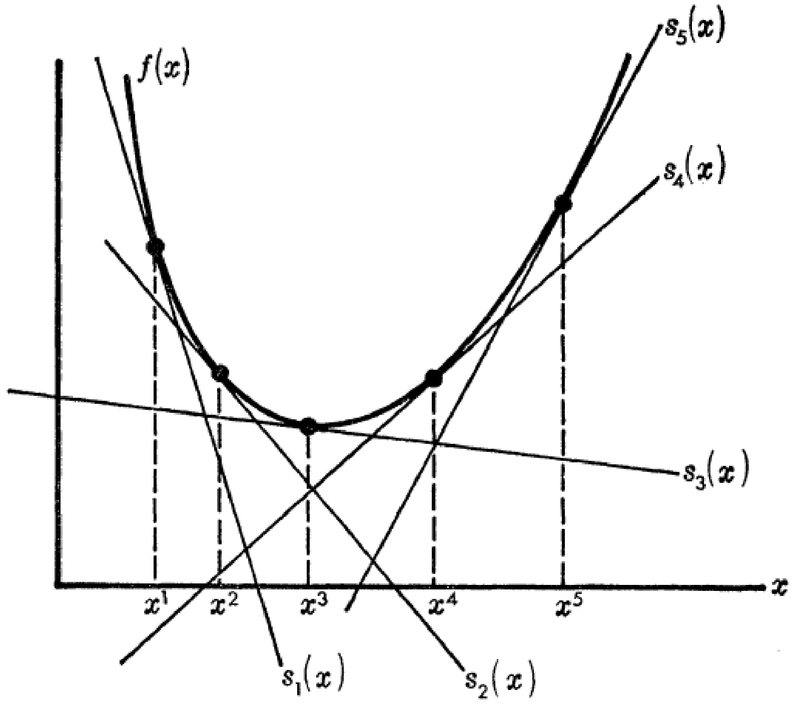
Dantzig–Wolfe-dekomposointimenetelmä toimii siis seuraavalla tavalla. Master-ongelma on kulmapisteiden kautta rajattu tarkastelemaan alkuperäisen käyvän alueen rajattua sisäosaa. Master-ongelman tieto alkuperäisen tehtävän uudelleenformuloinnin (4.4) päätöksentekomuuttujista on tässä tapauksessa puutteellista. Master-ongelman on siten hankittava lisää sopivia muuttujia aliongelman kautta. Aliongelman kustannuskertoimet Master-ongelma asettaa oman ratkaisunsa lokaalin herkkyyden pohjalta. Mikäli aliongelman ratkaisu, eli kulmapiste, ei ole kiinnostava voidaan nykyisen tehtävärakenteen tulkita olevan riittävä ja ratkaisun oikea.

5. BENDERSIN DEKOMPOSOINTI

Bendersin dekomposointimenetelmän [11] perustana toimii muuttujien ositus kahteen erilliseen joukkoon. Ositus erottaa komplisoivat muuttujat tehtävän muista muuttujista. Muuttujien osituksen vuoksi käsiteltävä optimointitehtävä voidaan jakaa Master-ongelmaksi ja mahdollisesti separoituvaksi aliongelmaksi.

Master-ongelma toimii ositetun muuttuja-avaruuden toisessa osassa komplisoivien muuttujien parissa. Tehtävälle suoritettavat manipulointiaskeleet ovat projektio sekä sitä seuraava ulkopuoleinen linearisointi. Alkuperäistehtävän manipuloinnin tuottaman Master-ongelman tehtävänä on tuottaa komplisoivalle muuttujalle arvoja. Tehtävää yksinkertaistetaan relaksoimalla uutta tehtävää. Yksinkertaistettu Master-ongelma tuottaa lopulta optimaalisen arvon rakentamalla paremman tehtävän iteroiden. [7, s. 677]

Tehtävän projisointi tehdään komplisoivan muuttujan avaruuteen, minkä jälkeen ulkopuoleinen linearisointi muuntaa tehtävän lineaaristen palojen, ns. leikkausten, kautta esitettyyn muotoon. Tätä on havainnollistettu kuvassa 4.



***Kuva 4.** Funktion approksimointi lineaaristen leikkausten avulla [7, s. 664]*

Kuten Dantzig–Wolfe -menetelmässä, uuden esitystavan täydellinen rakentaminen ei ole käytännöllistä. Siksi leikkaukset relaksoidaan ja aloitamme tehtävän ratkaisun vähästä. Puuttuvia leikkauksia voidaan generoida iteratiivisesti kiinnostaviin kohtiin, tietyille komplisoivan muuttujan arvoille, aliongelmien kautta. Tämänkaltainen ratkaisutapa tunnetaan Cutting plane -menetelmänä [12]. Koska komplisoivan muuttujan arvo vakioidaan aliongelmalle, aliongelman dekomposoituva rakenne paljastuu.

5.1 Tehtävän uudelleenformulointi

Tarkastellaan lineaarista optimointitehtävää komplisoivilla muuttujilla:

$$\min d^T y + c^T x \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} &Ax + By \geq b \\ &x \geq 0 \\ &y \geq 0, \end{aligned}$$

missä y on komplisoiva muuttuja ja A rakenteeltaan dekomposoituva. Ei-komplisoivien muuttujien termi kustannusfunktiossa on lineaarinen. Yleistetyn version epälineaarisille ongelmille on esittänyt Geoffrion [13].

Uudelleenformulointi [3, s. 370-381] mukaisesti tapahtuu kirjoittamalla tehtävä ensin muotoon, jossa on sekä ulompi että sisempi optimointitehtävä:

$$\min_{y \in R} \left\{ d^T y + \min_x \{c^T x \mid Ax \geq b - By, x \geq 0\} \right\}. \tag{5.2}$$

Jotta tehtävälle taataan käyvän ratkaisun *(y, x)* olemassaolo, y:n valinta tulee tehdä siten, että sisemmän minimointitehtävän ratkaisu on olemassa, ts.

$$R = \{y \mid \exists x \geq 0 : Ax \geq b - By.\} \tag{5.3}$$

Bendersin dekomposointimenetelmässä alkuperäinen tehtävä muunnetaan x:stä riippumattomaan Master-ongelman muotoon

$$\min_{z,y} z \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} &z \geq d^T y + (b - By)^T u_i^p, \qquad i = 1, \dots, n_p && \text{(5.4a)} \\ &(b - By)^T u_i^r \leq 0, \qquad i = 1, \dots, n_i && \text{(5.4b)} \\ &y \geq 0. \end{aligned}$$

Kun tehtävän ratkaisu y tiedetään, x voidaan selvittää tehtävän (5.2) sisempi alitehtävä ratkaisemalla, jolloin saadaan alkuperäisen tehtävän ratkaisu kokonaisuudessaan selville. [3, s. 373-374]

Rajoitteet (5.4a) ovat ns. optimaalisuusleikkauksia, jotka muodostavat tehtävän (5.2) tavoitefunktion alarajan, jota vastaan minimoimalla alkuperäisen tehtävän projektio y:hyn voidaan rekonstruoida. Rajoitteiden termeissä $(b - By)^T u_i^p$ parametrit u^p vastaavat kukin (5.2) sisemmän tehtävän duaalin ratkaisuja tietyillä y:n arvoilla. Jos jälleen ajattelemme tehtävää kulmapisteiden kannalta, saamme duaalitehtävän muodossa

$$\max_{1 \le i \le n_p} \{(b - By)^T u_i^p\}, \tag{5.5}$$

missä sisemmän tavoitefunktion lokaali herkkyys y:lle on selkeästi havaittavissa. Paras kulmapiste u^p tehtävälle (5.5) riippuu nyt y:stä.

Rajoitteet (5.4b) ovat ns. käypyysrajoitteita, jotka muodostavat y:n käyvän alueen (5.3):

$$R = \{y \mid (b - By)^T u_i^r \le 0, i = 1, \dots, n_i, y \ge 0\}. \tag{5.6}$$

Varsinainen ratkaistava aliongelma on (5.2) sisemmän tehtävän duaalin muodossa

$$\max_{u} \, (b - By)^T u \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} &A^T u \le c \\ &u \ge 0, \end{aligned}$$

missä A voi olla dekomposoituva. Leikkauksissa esiintyvät kulmapisteet u^p voitiin korvata niitä vastaavan monitahokkaan rajoitteilla, sillä tehtävä tuottaa ratkaisunaan kulmapisteen. Ratkaisuja u käytetään seuraavan luvun mukaisesti leikkausten generoinnissa. [3, s. 372-377]

5.2 Ratkaisumenetelmä

Tehtävän (5.4) rajoitteiden määrä riippuu parametrien u^p ja u^r lukumäärästä. Tehtävän koko kasvaa tästä syystä ongelmallisen suureksi. [3, s. 375]

Ratkaisun helpottamiseksi rajoitteet (5.4a) ja (5.4b) relaksoidaan poistamalla ne. Rajoitteita, joita relaksoidun tehtävän ratkaisu rikkoo, voidaan lisätä vähitellen. Uudeksi relaksoiduksi Master-ongelmaksi saadaan siten

$$\min_{z,y} z \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} &z \ge d^T y + (b - By)^T u_i^p, \qquad i \in I_1 \\ &(b - By)^T u_i^r \le 0, \qquad i \in I_2 \\ &y \ge 0, \end{aligned}$$

missä I_1 ja I_2 ovat rajoitejoukkojen (5.4a) ja (5.4b) osajoukkoja. [3, s. 376]

Master-ongelmaan lisätään rajoite, jota rikotaan eniten ja joka siten tuottaa parhaimman tavoitefunktion paikallisen approksimaation. Tämä tapahtuu, nyt mahdollisesti dekomposoituvan, aliongelman

$$\max_{u} \; (b - By^0)^T u \tag{5.9}$$

$$A^T u \leq c, \qquad u \geq 0$$

avulla.

Mikäli y^0:n arvo tekisi perusmuotoisesta aliongelmasta ei-käyvän, duaalitehtävä tuottaa äärettömän ratkaisun. Tässä tapauksessa Master-ongelmaan lisätään käypyysrajoite duaalitehtävän tuloksen duaalitietojen pohjalta. [3, s. 379]

Tehtävän suppenemista tarkkaillaan ylä- ja alarajojen avulla. Koska Master-ongelma on relaksoitu alkuperäisestä tehtävästä (5.7), sen ratkaisu tuottaa alarajan optimin arvolle. Leikkauksia lisätessä relaksaation aste vähenee ja alaraja nousee. Aliongelma puolestaan rajoitetaan tietyllä komplisoivan muuttujan arvolla ja siten sen kautta saadaan oikeaa optimia huonompi arvo, siis yläraja. Näiden rajojen välisen etäisyyden pohjalta voidaan tarkastella suppenemista. Mikäli rajat ovat tarpeeksi lähellä toisiaan algoritmi päättyy. [5, s. 116]

Aliongelman duaalitehtävän käytölle vaihtoehtoinen proseduuri [5, 11] säilyttää aliongelman perusmuodossa. Tällöin kuitenkin komplisoiva muuttuja käsitellään aliongelmassa päätöksentekomuuttujana, joka yhdistetään vakioarvoon rajoitteissa. Tämän rajoitteen varjohinnan, ts. duaalimuuttujan arvon, kautta saadaan tarvittava herkkyysinformaatio. Lisäksi aliongelman mahdollinen ei-käypyys täytyy käsitellä aliongelman lisämuuttujien avulla. [5, s. 128]

Kuten Dantzig–Wolfe, myös Bendersin menetelmä toimii keskitetysti ilman täydellistä tietoa tehtävän rakenteesta. Alkuperäisen ongelman uudelleenmuotoilussa tehtävä projisoitiin koordinointimuuttujana toimivan komplisoivan muuttujan avaruuteen ja relaksoitiin. Tämän vuoksi Master-ongelma kysyy aliongelmilta, kuinka tehtävä käyttäytyy nykyisen ratkaisun ympäristössä ja lisää vastauksen pohjalta leikkauksen Master-ongelmaan. Kun leikkauksia on riittävästi, Master-ongelma tuottaa optimaalisen komplisoivan muuttujan arvon alkuperäiseen tehtävään ja sen alitehtävä voidaan ratkaista oikein.

6. LAGRANGEN RELAKSAATIO

Lagrangen relaksaatio on relaksointimenetelmä, joka mahdollistaa optimointitehtävän dekomposoinnin ja sen hinnoittelupohjaisen koordinoidun ratkaisun. Lagrangen relaksaatio perustuu komplisoivien rajoitteiden relaksointiin dualisoimalla ne, esimerkkinä [14, s. 640].

Relaksoimalla komplisoivat rajoitteet tehtävästä voidaan paljastaa dekomposoituvat rakenteet. Komplisoivat muuttujat voidaan käsitellä menetelmän erikoistapauksen, Lagrangen dekomposoinnin [15], mukaisesti. Lagrangen dekomposoinnissa yhteiset muuttujat monistetaan ja muuttujien kopioiden yhtäläisyys relaksoidaan.

Alkuperäisen tehtävän ratkaisua kohti koordinoidaan duaalimuuttujia taiLagrangen kertoimia muuttamalla.

6.1 Tehtävän uudelleenmuotoilu

Lagrangen relaksaatio siirtää komplisoivat rajoitteet kustannusfunktioon, minkä johdosta ongelma muuttuu separoituvaksi. Olkoon tehtävä muotoa

$$\min c^T x \tag{6.1}$$

$$Ax \geq b \tag{6.1a}$$
$$Bx \geq e \tag{6.1b}$$
$$x \geq 0,$$

missä rajoite (6.1b) on komplisoiva. Lagrangen relaksaatio tuottaa uuden tehtävän

$$\min c^T x + u^T(e - Bx) \tag{6.2}$$

$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0.$$

Rajoitteen toteutus siirrettiin siis kustannusfunktioon ja täten komplisoivaa rajoitetta ei enää ole.

6.1.1 Komplisoivien rajoitteiden käsittely

Havainnollistetaan alisysteemeistä rakentuvan ongelman dekomposointia. Tarkastellaan systeemiä, joka koostuu kahdesta toisiinsa kytköksissä olevista alisysteemeistä. Alla esitetyn vasemmanpuoleisen tehtävän komplisoiva rajoite yhdistää alisysteemit, joiden lokaalit muuttujat ovat x_1 ja x_2. Lagrangen relaksaatio komplisoiville rajoitteille tuottaa uuden tehtävän, joka on esitetty oikealla.

$$\begin{array}{lcl}
\min c_1^T x + c_2^T x_2 & & \min c_1^T x_1 + c_2^T x_2 + u^T(e - B_1 x_1 - B_2 x_2) \\
 & & \\
A_1 x_1 \geq b_1 & & A_1 x_1 \geq b_1 \\
A_2 x_2 \geq b_2 & \rightarrow & A_2 x_2 \geq b_2 \\
B_1 x_1 + B_2 x_2 \geq e & & x_1 \geq 0 \\
x_1 \geq 0 & & x_2 \geq 0 \\
x_2 \geq 0 & &
\end{array}$$

Oikea relaksoitu tehtävä dekomposoituu nyt kahdeksi itsenäiseksi aliongelmaksi.

$$\begin{array}{lcl}
\min c_1^T x_1 - u^T B_1 x_1 & \qquad & \min c_2^T x_2 - u^T B_2 x_2 \\
 & & \\
A_1 x_1 \geq b_1 & & A_2 x_2 \geq b_2 \\
x_1 \geq 0 & & x_2 \geq 0
\end{array}$$

6.1.2 Lagrangen dekomposointi ja komplisoivat muuttujat

Lagrangen dekomposoinnissa komplisoivan rajoitteen relaksoinnin sijaan muuttujista otetaan kopio komplisoivien rajoitteiden purkua varten. Määräämällä alkuperäinen muuttuja ja sen kopio yhtä suuriksi saadaan uusi komplisoiva rajoite, joka relaksoidaan. Tehtävän (6.1) ratkaisua voidaan siten lähestyä toisella tavalla:

$$\min c^T x + u^T(y - x) \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}
Ax &\geq b \\
By &\geq e \\
x &\geq 0 \\
y &\geq 0
\end{aligned}$$

Komplisoivien muuttujien tapauksessa voidaan käyttää Lagrangen dekomposointia. Koska aliongelmat jakavat komplisoivan muuttujan, ottamalla kopio jokaiselle aliongelmalle erikseen ongelma dekomposoituu relaksoimalla kopioiden yhtäsuuruudet. Olkoon tehtävä

$$\min c_1^T x_1 + c_2^T x_2 + d^T y \tag{6.4}$$

$$A_1 x_1 + B_1 y \geq b_1 \tag{6.4a}$$

$$A_2x_2 + B_2y \geq b_2 \tag{6.4b}$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Ottamalla komplisoivasta muuttujasta y kopio w, rajoitteet (6.4a) ja (6.4b) voidaan korvata rajoitteilla

$$A_1x_1 + B_1y \geq b_1 \tag{6.5a}$$
$$A_2x_2 + B_2w \geq b_2 \tag{6.5b}$$
$$y = w, \tag{6.5c}$$

joista kopioiden yhtäläisyys (6.5c) voidaan relaksoida. Nyt tehtävä dekomposoituu tehtäviin

$$\min c_1^T x_1 + d^T y - u^T y$$

$$A_1x_1 + B_1y \geq b_1$$
$$x_1 \geq 0$$
$$y \geq 0$$

$$\min c_2^T x_2 + u^T w$$

$$A_2x_2 + B_2w \geq b_2$$
$$x_2 \geq 0$$
$$w \geq 0$$

6.2 Lagrangen duaalitehtävä ja ratkaisumenetelmät

Relaksoinnin takia tehtävän ratkaisu tuottaa alkuperäiselle tehtävälle alarajan, jonka tiukkuus riippuu Lagrangen kertoimista u. Koordinoijan tehtävänä on asettaa kertoimet siten, että alaraja on mahdollisimman tiukka, eli relaksoitu rajoite pitää mahdollisimman hyvin. Tehtäväksi saadaan ns. Lagrangen duaalitehtävä

$$\max_{u \geq 0} \left\{ \min\{c^T x + u^T(e - Bx) \mid Ax \geq b, x \geq 0\} \right\}. \tag{6.6}$$

Koordinoiva ratkaisu toteutetaan iteratiivisena proseduurina, jossa koordinoija säätää Lagrangen kertoimia aliongelmien ratkaisujen pohjalta. Määritellään duaalifunktio

$$d(u) = \min\{c^T x + u^T(e - Bx) \mid Ax \geq b, x \geq 0\}. \tag{6.7}$$

Nyt duaalitehtävä on lyhyesti ilmaistuna

$$\max_{u \geq 0} d(u). \tag{6.8}$$

Lagrangen relaksaation perustana on muotoilla alkuperäisestä vaikeasta tehtävästä helppo, separoituva, tehtävä. Toimenpiteen kustannuksena on sopivan duaalimuuttujan arvon iteratiivinen etsintä.

Duaalitehtävän ratkaistussa käytetään optimoinnin numeerisia menetelmiä, jotka soveltuvat ei-sileisiin, ts. ei-jatkuvan gradientin omaaviin, tehtäviin. Usein tehtävän uudelleenformuloinnin, tässä tapauksessa Lagrangen relaksaation, tuloksena tehtävästä tulee ei-sileä, jolloin näitä erityismenetelmiä tarvitaan. Menetelmien kuvataan kutsuvan ns. oraakkelia, joka antaa tehtävän (6.6) sisemmän tehtävän arvon $d(u^k)$ sekä subgradientin g^k tietyllä duaalimuuttujan arvolla u^k. [16]

Subgradientti yleistää gradientin ei-jatkuvan gradientin tapaukselle. Pisteellä voi olla joukko subgradientteja, ns. subdifferentiaali [17]. Duaalitehtävän ratkaisumenetelmissä huomioidaan vain yksi mahdollisesti monesta subgradientista. Menetelmät käyttävät oraakkelin antamaa tietoa uuden duaalimuuttujan arvon u^{k+1} tuottamiseen. Uutta arvoa käytetään uudestaan oraakkelin kutsumisessa.

Dekomposointi-koordinointi rakenteessa oraakkeli käsittää useita aliongelmia. Tässä tapauksessa jokaisen aliongelman lokaali laskenta tuottaa oman osuutensa informaatiosta, joka kootaan koordinoijalle duaalitehtävän ratkaisun päivitysaskelta varten. Koordinoija taas välittää uuden duaalimuuttujan arvon aliongelmille. Toisin kuin Dantzig–Wolfe ja Benders-menetelmät, Lagrangen relaksaatiossa suunnitelmanteko on hajautettu eli aliongelmat itse tuottavat ratkaisun. Keskitetysti menetelmässä tapahtuu vain koordinointimuuttujan asettelu.

Duaalitehtävälle käytettävien ei-sileiden tehtävien ratkaisumenetelmät tyypillisesti jaotellaan subgradientti- ja cutting plane –menetelmiin [18, s. 133]. Näiden menetelmien variantteja sekä välimuotoja on kuvannut mm. [18], [16]. Kirjallisuudessa esim. [5] ja [14] luvussa 6 ovat käsitelleet duaalitehtävien ratkaisumenetelmiä.

Seuraavissa osioissa esitellään duaalitehtävän ratkaisumenetelmiä.

6.2.1 Subgradienttimenetelmä

Subgradienttimenetelmän perustana toimii iteraatio

$$u^{k+1} = u^k + \alpha g^k, \tag{6.9}$$

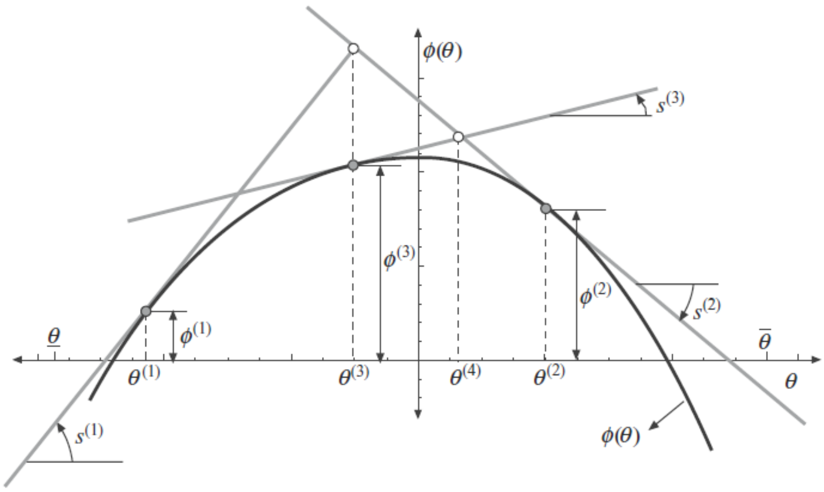
missä g on subgradientti u:n suhteen. Rajoitteen (6.1b) tapauksessa subgradientti on $e - Bx^k$. Oraakkeli, ts. aliongelmat, pystyy tuottamaan subgradientti-informaation siten ilman ylimääräistä vaivaa ratkaisunsa x^k kautta. Askelkoon α valintasääntöjä on koonnut esim. [19].

Subgradienttimenetelmän etuna yksinkertainen toteutus. Menetelmän huonoja puolia ovat suppenemisen hitaus, epästabiilius sekä huono tarkkuus. [18]

Subgradienttimenetelmän variantit pyrkivät parantamaan suppenemisominaisuuksia. Näihin varianttihin kuuluvat mm. inkrementaalinen sekä approksimoiva versio [14, s. 614].

6.2.2 Cutting plane –menetelmä

Edeltävän subgradienttimenetelmän voidaan havaita hyödyntävän vain viimeisintä oraakkelin tuottamaa informaatiota. Cutting plane -menetelmän (CPM) periaatteena on konstruoida tavoitefunktion approksimaatio ns. leikkausten avulla. Vastaava lähestymistapa esitettiin jo Bendersin menetelmän yhteydessä luvussa 5, missä sisemmän tehtävän arvo projisoitiin komplisoivan muuttujan avaruuteen ja rekonstruoitiin leikkausten avulla. Nyt rekonstruktion kohteena on Lagrangen duaalifunktio *d*, jonka osalta leikkaukset toimivat alarajan sijaan ylärajana kuperuudesta johtuen.



***Kuva 5.** Duaalifunktion rekonstruktio leikkauksilla [5, s. 198]*

Leikkaus koostetaan sisemmän tehtävän arvon $d(u^k)$ sekä subgradientin g^k pohjalta muodossa

$$z \leq d(u^k) + (g^k)^T(u - u^k) \tag{6.10}$$

Kootut leikkaukset muodostavat ns. informaatiokimpun (engl. bundle)

$$(d(u^k), g^k), \qquad k = 1, \dots, K \tag{6.11}$$

Duaalimuuttujan päivitys tapahtuu kerättyjä leikkauksia käyttämällä, rekonstruktion maksimikohta etsimällä. Tämä tapahtuu ratkaisemalla lineaarinen optimointitehtävä

$$\max_{z,u} z \tag{6.12}$$

$$z \leq d(u^k) + (g^k)^T(u - u^k), \qquad k = 1, \dots, K$$

Uuden ratkaisun tuottaman arvon kohdalla muodostetaan uusi leikkaus oraakkelia kutsumalla. Iteraatio kerrallaan approksimaation tarkkuus siten kasvaa, kun leikkauksia lisätään. [5, s. 197-198]

Cutting plane –menetelmän päivitysaskel on subgradienttimentelmää raskaampi. Lisäksi menetelmä kärsii subgradienttimenetelmän tapaan epästabiiliudesta [18, s. 137]. Epästabiiliusongelman ratkaisuksi on kehitetty stabiloituja menetelmiä, kuten Bundle-menetelmät [20] sekä ns. ACCPM-menetelmä [16].

6.2.3 Bundle-menetelmät

Bundle-menetelmien ideana on cutting plane –menetelmän stabilointi. Nimensä mukaisesti menetelmä hyödyntää CPM-yhteydessä mainittua koottua informaatiokimppua. Menetelmä pystyy myös rajoittamaan kimpun leikkausten määrää. [16]

Bundle-menetelmä keskittyy päivitettävän stabiiliuskeskuksen ympäristöön. Menetelmät käyttävät eri strategiota stabilointiin [20]. Laajemman katsauksen bundle-menetelmiin on tehnyt esim. Mäkelä [21].

Alkuperäinen bundle-menetelmä lisää CPM-tehtävään neliöllisen termin, joka rankaisee duaalimuuttujan etäisyydestä stabiiliuskeskukseen. Tehtävä muuttuu siten muotoon

$$\max_{z,u} z - \frac{1}{2t} \|u - u_S\|^2 \tag{6.13}$$

$$z \leq d(u^k) + (g^k)^T(u - u^k), \qquad k = 1, \dots, K$$

Bundle-menetelmän stabiiliuskeskusta u_s päivitetään, tarvittaessa joka iteraatio, testaamalla tavoitefunktion arvon paranemista uudessa ratkaisussa. [18, s. 140]

Vaihtoehtoisiin bundle-menetelmiin kuuluu ns. trust region -menetelmä [20, 22], joka päivittää duaalimuuttujien käypää aluetta dynaamisesti. Level set bundle-menetelmän [20] periaatteena taas on kohdistaa etsintä alueelle, jossa CPM-malli antaa määriteltyä kohdetasoa paremman arvon.

7. YHTEENVETO

Tässä työssä kartoitettiin optimointitehtävien dekomposointimenetelmien ratkaisustrategioita kirjallisuuden pohjalta.

Dantzig–Wolfe -menetelmässä optimointitehtävää manipuloitiin muuntamalla sen rajoite kulmapisteitä käyttävään esitysmuotoon. Saadun tehtävän kulmapisteet rajoitettiin pienempään joukkoon, jolloin tehtävän ratkaisu helpottui. Tärkeiden kulmapisteiden puutteesta johtuen aliongelmille annettiin tehtäväksi kiinnostavien kulmapisteiden tuottaminen. Tämä tapahtui column generation -periaatteen mukaisesti, jolloin koordinoiva Master-ongelma asetti aliongelmien kustannuskertoimet herkkyysinformaation pohjalta siten, että aliongelma tuottaisi ratkaisua parantavan kulmapisteen.

Bendersin dekomposoinnissa tehtävän manipuloinnin tuloksena tehtävä projisoitiin dekomposoinnin estävän komplisoivan muuttujan avaruuteen. Uusi tehtävä muunnettiin lineaaristen leikkausten kautta esitettyyn Master-ongelman muotoon. Leikkaukset relaksoitiin ratkaisun helpottamiseksi. Näin dekomposoituva rakenne saatettiin erottaa omaan aliongelmaan, jonka tehtävä oli tuottaa leikkauksia komplisoivan muuttujan kandidaattikohtiin Master-ongelmalle. Master-ongelma tuottaa lopulta optimaalisen tuloksen, kun leikkaukset ovat riittäviä.

Lagrangen relaksaatiossa komplisoiva rajoite relaksoitiin dualisoinnilla. Vastaava käsittely saatettiin tehdä myös komplisoivien muuttujien tapauksessa. Koordinoitu ratkaisu tapahtui ratkaisemalla Lagrangen duaalitehtävä. Tehtävän ratkaisumenetelmiin kuuluvat mm. subgradientti-, cutting plane sekä bundle-menetelmät.

LÄHTEET

[1] J. Nocedal, S.J. Wright, Numerical optimization, Springer, New York, 1999.

[2] R. Scattolini, Architectures for distributed and hierarchical model predictive control–a review, Journal of Process Control, Vol. 19, Iss. 5, 2009, pp. 723-731.

[3] L.S. Lasdon, Optimization theory for large systems, Macmillan, London, 1970.

[4] W. Findeisen, F.N. Bailey, M. Brdys, K. Malinowski, P. Tatjewski, A. Wozniak, Control and coordination in hierarchical systems, John Wiley & Sons, 1980.

[5] A.J. Conejo, E. Castillo, R. Minguez, R. Garcia-Bertrand, Decomposition Techniques in Mathematical Programming: Engineering and Science Applications, Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.

[6] S. Bradley, A. Hax, T. Magnanti, Applied mathematical programming, Addison-Wesley, 1977.

[7] A.M. Geoffrion, Elements of Large-Scale Mathematical Programming: Part I: Concepts, Management Science, Vol. 16, Iss. 11, 1970, pp. 652-675.

[8] A.M. Geoffrion, Elements of Large Scale Mathematical Programming Part II: Synthesis of Algorithms and Bibliography, Management Science, Vol. 16, Iss. 11, 1970, pp. 676-691.

[9] G.B. Dantzig, P. Wolfe, Decomposition principle for linear programs, Operations research, Vol. 8, Iss. 1, 1960, pp. 101-111.

[10] J.R. Tebboth, A computational study of Dantzig-Wolfe decomposition, University of Buckingham, 2001.

[11] J.F. Benders, Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems, Numerische mathematik, Vol. 4, Iss. 1, 1962, pp. 238-252.

[12] J. Kelley James E, The cutting-plane method for solving convex programs, Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 8, Iss. 4, 1960, pp. 703-712.

[13] A.M. Geoffrion, Generalized benders decomposition, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 10, Iss. 4, 1972, pp. 237-260.

[14] D.P. Bertsekas, Nonlinear programming, Athena scientific Belmont, 1999.

[15] M. Guignard, S. Kim, Lagrangean decomposition: A model yielding stronger Lagrangean bounds, Mathematical Programming, Vol. 39, Iss. 2, 1987, pp. 215-228.

[16] J. Goffin, J. Vial, Convex nondifferentiable optimization: A survey focused on the analytic center cutting plane method, Optimization Methods and Software, Vol. 17, Iss. 5, 2002, pp. 805-867.

[17] R.T. Rockafellar, Convex analysis, Princeton university press, 2015.

[18] C. Lemaréchal, Lagrangian relaxation, Computational combinatorial optimization, 2001, pp. 112-156.

[19] S. Boyd, A. Mutapcic, Subgradient methods, Lecture notes of EE364b, Stanford University, Winter Quarter, Vol. 2007, 2006.

[20] C. Lemaréchal, A. Nemirovskii, Y. Nesterov, New variants of bundle methods, Mathematical Programming, Vol. 69, Iss. 1, 1995, pp. 111-147.

[21] M. Mäkelä, Survey of bundle methods for nonsmooth optimization, Optimization Methods and Software, Vol. 17, Iss. 1, 2002, pp. 1-29.

[22] N.J. Redondo, A.J. Conejo, Short-term hydro-thermal coordination by Lagrangian relaxation: solution of the dual problem, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 14, Iss. 1, 1999, pp. 89-95.